

LAF Mathematik

Näherungsweise Berechnen von Nullstellen von Funktionen

von
Holger Langlotz

**Jahrgangsstufe 12, 2002/2003
Halbjahr 12.1**

Fachlehrer: Endres

Inhalt

1. Vorkenntnisse
 - 1.1 Nicht abbrechende Dezimalzahlen; Intervallschachtelung S. 1
 - 1.2 Bestimmung von Nullstellen von Funktionen S. 2
2. Intervallhalbierungsmethode S. 3
3. Zweipunkt-Sekantenmethode S. 4
4. Newton-Verfahren S. 6
5. Quellen S. 8

Anhang:

1. Handout

1. Vorkenntnisse

1.1 Nicht abbrechende Dezimalzahlen; Intervallschachtelung

Satz: Jeder abbrechenden oder nicht abbrechenden, periodischen oder nicht periodischen Dezimaldarstellung einer Zahl ist auf dem Zahlenstrahl genau ein bestimmter Punkt zugeordnet. Dies gilt auch umgekehrt: Jedem Punkt auf dem Zahlenstrahl lässt sich eindeutig eine Dezimaldarstellung zuordnen.

Demnach ist also der Zahl 1,25 eindeutig ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet. Gleiches gilt für $2/3$, anders geschrieben 0,666...

Dieser Punkt liegt auf der Zahlengeraden im Intervall zwischen

[0,6; 0,7]

[0,66; 0,67]

[0,666; 0,667]

...

Zwischen den Grenzen der Intervalle befinden sich unendlich viele Punkte. Jedoch gibt es nur einen Punkt in diesen Intervallen, der die Zahl 0,666... bezeichnet, dieser ist durch die Dezimaldarstellung eindeutig bestimmt. Durch diese Methode ist jeder rationalen Zahl eindeutig ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.

Auf diese Weise kann man auch die Punkte auf dem Zahlenstrahl zahlenmäßig erfassen, denen keine rationale Zahl zugeordnet werden kann. Die Dezimaldarstellung 0,414411444111... bezeichnet beispielsweise einen Punkt auf der Zahlengeraden, der nicht durch eine rationale Zahl erfasst wird. Er befindet sich zwischen

[0,4; 0,5]

[0,41; 0,42]

[0,414; 0,415]

[0,4144; 0,4145]

[0,41441; 0,41442]

[0,414411; 0,414412]

...

Da die Intervalle, die sich dem Punkt annähern, ineinander geschachtelt sind, wird eine solche Intervallfolge als Intervallschachtelung bezeichnet.

Damit die Intervallschachtelung genau einen Punkt auf der Zahlengeraden bestimmt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- a) die linken Intervallgrenzen müssen stets größer und die rechten stets kleiner werden,
- b) die linke Grenze eines Intervalls muss immer kleiner sein als die rechte Grenze,
- c) die Intervalllängen müssen mit wachsender Anzahl der Intervalle beliebig klein werden.

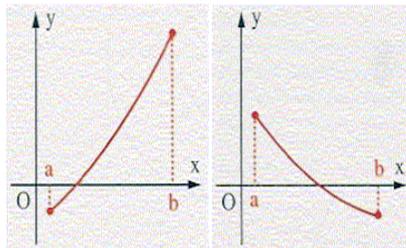
Punkte auf der Zahlengeraden mit rationalen Zahlen führen zu einer abbrechenden oder periodischen Dezimaldarstellung. Punkte ohne rationale Zahl besitzen eine nicht abbrechende und nicht periodische Dezimaldarstellung.

1.2 Bestimmung von Nullstellen von Funktionen

Um die Nullstellen einer Funktion $f(x)$ zu bestimmen, setzt man den Term $f(x)$ normalerweise gleich Null. Die so entstandene Gleichung wird dann algebraisch gelöst, das heißt, sie wird nach x aufgelöst. So erhält man gewöhnlich dezimal darstellbare Ergebnisse für x . Dabei kann eine Funktion maximal so viele Nullstellen haben, wie der Grad des Polynoms beträgt.

Nun gibt es aber auch Funktionen, bei denen die oben beschriebene Methode eine Gleichung liefert, die nicht exakt gelöst werden kann. Die Nullstellen dieser Funktion werden durch nicht rationale Zahlen beschrieben. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $f(x) = x^3 + 2x - 2$.

Zur Feststellung, ob eine solche Funktion überhaupt Nullstellen hat, kann man entweder das Schaubild der Funktion im GTR zeichnen lassen, oder man versucht zwei Stellen a und b aus D_f zu ermitteln, für die die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben. Hat man zwei solche Punkte ermittelt, hat die Funktion f mindestens eine Nullstelle.



Ist a ein Wert links der Nullstelle und b einer rechts davon, so haben die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ umgekehrte Vorzeichen (siehe Grafik).

Hier werden nun drei Verfahren beschrieben, um die Nullstellen solcher Funktionen näherungsweise zu berechnen.

2. Intervallhalbierungsmethode

Bei diesem Verfahren geht es darum, die gesuchte Nullstelle x^* der Funktion f mit Hilfe der Intervallschachtelung näherungsweise zu berechnen. Hierzu sucht man ein Intervall $[a; b]$, in dessen Grenzen die gesuchte Nullstelle liegt. Hierbei ist es sinnvoll, ganze Zahlen für a und b zu wählen, wobei $b = a + 1$ sein sollte. Würde man ein größeres Startintervall wählen, würde man sich der gesuchten Nullstelle x^* zu langsam annähern. Wichtig ist, dass in dem Startintervall nur eine Nullstelle liegt. Es ist also $a < x^* < b$.

Um sich der gesuchten Nullstelle x^* zu nähern, ermittelt man die Mitte m des Intervalls $[a; b]$, wozu folgende Gleichung gelöst wird: $m_1 = \frac{1}{2}(a + b)$. Der dadurch erhaltene Wert m_1 ist der erste Näherungswert für die gesuchte Nullstelle x^* .

Im nächsten Schritt ermittelt man den Funktionswert an der Stelle m_1 $f(m_1)$. Da die gesuchte Nullstelle zwischen a und b liegt, hat der Funktionswert an der Stelle a $f(a)$ das umgekehrte Vorzeichen wie der Funktionswert an der Stelle b $f(b)$, weil an der Nullstelle einer Funktion immer ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte stattfindet. Hat $f(m_1)$ das gleiche Vorzeichen wie $f(a)$, so wird für den nächsten Schritt die Intervallgrenze a durch m_1 ersetzt. Hat $f(m_1)$ das gleiche Vorzeichen wie $f(b)$, dann ersetzt man für den nächsten Schritt die Intervallgrenze b durch m_1 .

Wiederholt man diese Schritte immer wieder, so erhält man immer genauere Näherungswerte für die gesuchte Nullstelle x^* .

Das Verfahren heißt Intervallhalbierungsmethode, da die Intervalle bei jedem Schritt halbiert werden.

Beim Intervallhalbierungsverfahren geht man also von einem Intervall $[a; b]$ aus, in dessen Grenzen sich eine Nullstelle befindet. Durch die fortgesetzte Intervallhalbierung wird die gesuchte Nullstelle in immer kleinere Intervalle eingeschlossen.

Will man den Näherungswert für x^* auf u Dezimalen genau ausrechnen, so bricht man das Verfahren ab, wenn sich die $u + 1$ te Dezimale des Näherungswerts m_n bei der nächsten Wiederholung dieser Methode nicht mehr ändert und rundet dann den Näherungswert entsprechend auf u -Dezimalen. Beschließt man also, dass man einen Wert auf drei Dezimalen genau erhalten möchte, führt man das Verfahren so lange durch, bis sich die 4. Dezimale nicht mehr ändert und rundet dann auf drei Dezimalen.

Welche Schwachpunkte hat das Verfahren?

Schwachpunkt der Intervallhalbierungsmethode ist, dass, wenn in dem gewählten Startintervall mehrere Nullstellen liegen, unter Umständen die „falsche“ Nullstelle eingegrenzt wird.

Außerdem nimmt die Genauigkeit der Näherungen bei dieser Methode nur sehr langsam zu.

3. Zweipunkt-Sekantenmethode

Bei diesem Verfahren nähert man sich der gesuchten Nullstelle x^* der Funktion f indem man links der gesuchten Nullstelle einen Punkt $A(a | f(a))$ auf dem Schaubild der Funktion f und rechts davon einen Punkt $B(b | f(b))$ auf dem Schaubild von f wählt und eine Gerade durch diese Punkte legt. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x -Achse ist dann der Näherungswert für die gesuchte Nullstelle x^* .

Zur Durchführung des Verfahrens sucht man ein Intervall $[a; b]$, in dessen Grenzen die gesuchte Nullstelle liegt. Hierbei ist es sinnvoll, ganze Zahlen für a und b zu wählen, wobei $b = a + 1$ sein sollte. Würde man ein größeres Startintervall wählen, würde man sich der gesuchten Nullstelle x^* zu langsam annähern. Wichtig ist, dass in dem Startintervall nur eine Nullstelle liegt. Es ist also $a < x^* < b$.

Um sich der gesuchten Nullstelle x^* zu nähern, ermittelt man den Schnittpunkt $S(s | 0)$ der Geraden durch A und B mit der x -Achse; s errechnet sich folgendermaßen:

Allgemeine Geradengleichung:

$$y = m \cdot x + c$$

$$y - c = m \cdot x$$

$$x = (y - c) / m \quad (1)$$

Bedingung für Nullstelle :

$$y = 0 \quad (2)$$

Steigung der Geraden:

$$m = (f(a) - f(b)) / (a - b) \quad (3)$$

y -Achsenabschnitt:

$$y = m \cdot x + c$$

$c = y - m \cdot x$, Punkt auf der Geraden $A(a | f(a))$ einsetzen:

$$c = f(a) - m \cdot a \quad (4)$$

(3) in (4):

$$c = f(a) - ((f(a) - f(b)) / (a - b)) \quad (5)$$

(2) in (1):

$$x = (0 - c) / m$$

$$x = - (c / m) \quad (6)$$

(3) in (6):

$$x = -c * ((a - b) / (f(a) - f(b))) \quad (7)$$

(5) in (7):

$$x = - (f(a) - ((f(a) - f(b)) / (a - b)) * a) * ((a - b) / (f(a) - f(b)))$$

$$x = (- f(a) + (((f(a) - f(b)) / (a - b)) * a) * ((a - b) / (f(a) - f(b))))$$

$$x = - ((f(a) * (a - b)) / (f(a) - f(b))) + (((f(a) - f(b)) * a * (a - b)) / ((a - b) * (f(a) - f(b))))$$

$$x = a - (f(a) * (a - b)) / (f(a) - f(b))$$

x ist der gesuchte Näherungswert s, damit ergibt sich zur Berechnung von s₁:

$$s_1 = a - (f(a) * (a - b)) / (f(a) - f(b))$$

Im nächsten Schritt ermittelt man den Funktionswert an der Stelle s₁ f(s₁). Da die gesuchte Nullstelle zwischen a und b liegt, hat der Funktionswert an der Stelle a f(a) das umgekehrte Vorzeichen wie der Funktionswert an der Stelle b f(b), weil an der Nullstelle einer Funktion immer ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte stattfindet. Hat f(s₁) das gleiche Vorzeichen wie f(a), so wird für den nächsten Schritt die Intervallgrenze a durch s₁ ersetzt. Hat f(s₁) das gleiche Vorzeichen wie f(b), dann ersetzt man für den nächsten Schritt die Intervallgrenze b durch s₁.

Wiederholt man diese Schritte immer wieder, so erhält man immer genauere Näherungswerte für die gesuchte Nullstelle x*.

Da die Gerade durch die Punkte A und B eine Sekante des Schaubilds der Funktion f darstellt, wird das Verfahren als Zweipunkt-Sekantenmethode bezeichnet.

Bei der Zweipunkt-Sekantenmethode geht man also von einem Intervall [a; b] aus, in dessen Grenzen sich eine Nullstelle befindet. Durch die fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens wird die gesuchte Nullstelle in immer kleinere Intervalle eingeschlossen.

Will man den Näherungswert für x* auf u Dezimalen genau ausrechnen, so bricht man das Verfahren ab, wenn sich die u + 1te Dezimale des Näherungswerts s_n bei der nächsten Wiederholung dieser Methode nicht mehr ändert und rundet dann den Näherungswert entsprechend auf u-Dezimalen. Beschließt man also, dass man einen Wert auf drei Dezimalen genau erhalten möchte, führt man das Verfahren so lange durch, bis sich die 4. Dezimale nicht mehr ändert und rundet dann auf drei Dezimalen.

Welche Schwachpunkte hat das Verfahren?

Schwachpunkt der Zweipunkt-Sekantenmethode ist, wie auch beim Intervallhalbierungsverfahren, dass, wenn in dem gewählten Startintervall mehrere Nullstellen liegen, unter Umständen die „falsche“ Nullstelle eingegrenzt wird.

4. Newton-Verfahren

Um das Newton-Verfahren durchführen zu können, muss die Funktion f differenzierbar sein. Die gesuchte Nullstelle wird mit x^* bezeichnet. Man sucht einen Näherungswert $x_0 \in (a, b)$, der möglichst nah an der Nullstelle liegt. Ein Verfahren, mit dem meist ein guter Startwert ermittelt wird, ist folgendes: Zuerst muss ein Intervall der Länge 1 mit ganzen Zahlen als Intervallenden bestimmt werden, das die gesuchte Nullstelle enthält ($x_0 \in (a, b)$; a ganze Zahlen; $b = a + 1$). Als Startwert x_0 wird dann die Mitte des Intervalls gewählt.

Von diesem Näherungswert x_0 ausgehend legt man die Tangente im Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$ an das Schaubild von f . Die Gleichung der Tangente im Punkt P_0 lautet $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Dann berechnet man die Stelle x_1 , an der die Tangente die x -Achse schneidet. Dazu muss der y -Wert der Tangente Null sein, es ergibt sich folgende Gleichung:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \text{ mit } f'(x_0) \neq 0$$

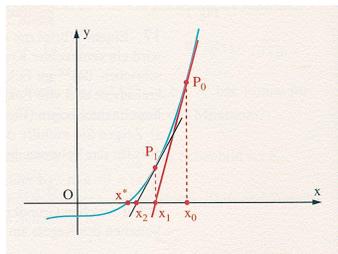
Löst man diese Gleichung nach x_1 auf, ergibt sich:

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0)$$

$$x_1 - x_0 = -f(x_0) / f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$$

Oft ist x_1 ein besserer Näherungswert für x^* als x_0 . Nun wiederholt man diese Rechnung mit dem neuen Startwert x_1 und so fort. So erhält man (unter gewissen Voraussetzungen, s. u.) eine Folge x_0, x_1, x_2, \dots , die einen immer besseren Näherungswert für x^* darstellen.



Für das Newton-Verfahren gilt also:

Hat die differenzierbare Funktion f eine Nullstelle, so kann man diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren ermitteln.

Die Iterationsvorschrift (iterare (lat.): wiederholen) mit dem Startwert x_0 lautet:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad f'(x) \neq 0$$

Will man den Näherungswert für x^* auf u Dezimalen genau ausrechnen, so bricht man das Verfahren ab, wenn sich die $u + 1$ te Dezimale des Näherungswerts m_n bei der nächsten Wiederholung dieser Methode nicht mehr ändert und rundet dann den Näherungswert entsprechend auf u -Dezimalen. Beschließt man also, dass man einen Wert auf drei Dezimalen genau erhalten möchte, führt man das Verfahren so lange durch, bis sich die 4. Dezimale nicht mehr ändert und rundet dann auf drei Dezimalen.

Welche Schwachpunkte hat das Verfahren?

Das Verfahren ist auf alle differenzierbaren Funktionen anwendbar. Bedingung ist, dass $f'(x_n) \neq 0$ ist, da sonst der Quotient $f(x) / f'(x_n)$ nicht definiert ist, da durch Null nicht dividiert werden darf. Damit wäre auch der Term $x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n)$ nicht definiert.

Jedoch können auch, wenn die Funktion diese Bedingungen erfüllt, Probleme auftreten, nämlich dann, wenn die x_n -Werte nicht gegen die gesuchte Nullstelle x^* streben. In diesem Fall muss ein Startwert x_0 gewählt werden, der näher an der Nullstelle x^* liegt.

Hier einige Beispiele an denen deutlich wird, wieso der Startwert x_0 möglichst dicht an der gesuchten Nullstelle x^* liegen muss.

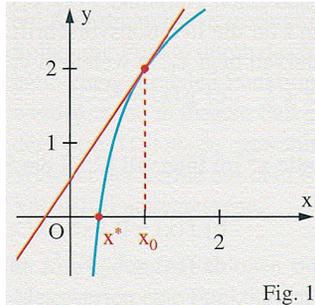


Fig. 1:

$$f(x) = \ln(x) - (1/x) + 2$$

Die gesuchte Nullstelle liegt im Intervall zwischen $[0; 1]$. Wählt man den Startwert $x_0 = 1$, so liegt der Wert von x_1 außerhalb des Definitionsbereichs der Funktion. Die Funktion ist nämlich nur für positive x -Werte definiert. Man muss x_0 also so wählen, dass es möglichst nahe an x^* liegt.

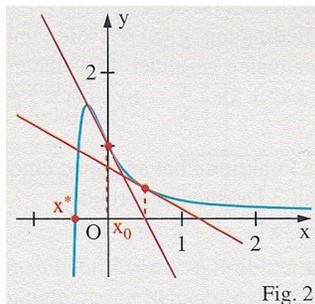


Fig. 2:

$$F(x) = (x^3 + 2x + 1) / (x + 1)^4$$

Hier liegt die gesuchte Nullstelle x^* zwischen -1 und 0 . Für den Startwert $x_1 = 0$ streben die x_n -Werte gegen unendlich, da sich zwischen x^* und x_0 ein Extremwert der Funktion befindet. Links des Hochpunkts liegt x^* , auf dieser Seite ist die Steigung des Schaubilds der Funktion f positiv, rechts des Hochpunkts ist sie negativ. Wählt man einen Ausgangswert x_0 , der auf der anderen Seite eines Extremwerts liegt, als die gesuchte Nullstelle x^* , so kann man die Nullstelle mit dem Newton-Verfahren nicht näherungsweise bestimmen. Dies ist der Fall, da sich die Schnittpunkte der Tangenten mit der x -Achse dann nie beliebig an x^* annähern.

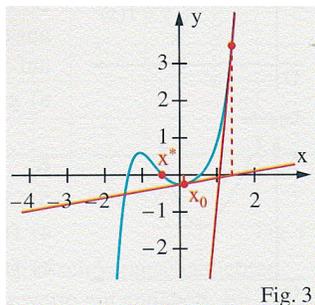


Fig. 3:

$$F(x) = \frac{1}{2} x^5 - \frac{1}{2} x^3 + x^2 - \frac{1}{4}$$

Die gesuchte Nullstelle befindet sich in diesem Beispiel links eines Extremwerts der Funktion, der Startwert x_0 rechts davon. In diesem speziellen Fall streben die x_n -Werte gegen eine Nullstelle, die nicht die gesuchte ist. Dies ist der Fall, wenn auf der anderen Seite des Extremwerts der Funktion eine weitere Nullstelle liegt.

Das Newton-Verfahren hat also Schwachpunkte, wenn in der Umgebung der gesuchten Nullstelle x^* ein Extremwert und/oder eine weitere Nullstelle der Funktion liegt, oder wenn die gesuchte Nullstelle x^* nahe an der Grenze des Definitionsbereichs der Funktion liegt.

5. Quellen

LS Analysis Grundkurs, Gerhard Brüstle u.a., Ernst Klett Verlag

LS 9, August Schmid (Hrsg.), Ernst Klett Verlag

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/lexikon/N/newton_verfahren.html

Anhang

A1 Handout

Näherungsweise Bestimmen von Nullstellen von Funktionen

1. Intervallhalbierungsmethode

Die gesuchte Nullstelle x^* der Funktion f soll mit Hilfe der Intervallschachtelung näherungsweise berechnet werden.

1. Hierzu sucht man ein Intervall $[a; b]$, in dessen Grenzen die gesuchte Nullstelle liegt; sinnvoll: ganze Zahlen für a und b wählen, wobei $b = a + 1$ sein sollte. Es darf nur eine Nullstelle in diesem Startintervall liegen.
2. Näherungswert für x^* ist die Intervallmitte: $m_1 = \frac{1}{2}(a + b)$
3. $f(m_1)$ ermitteln. Hat $f(m_1)$ das gleiche Vorzeichen wie $f(a)$, so wird für den nächsten Schritt die Intervallgrenze a durch m_1 ersetzt. Hat $f(m_1)$ das gleiche Vorzeichen wie $f(b)$, dann ersetzt man für den nächsten Schritt die Intervallgrenze b durch m_1 .
4. Wiederholt man diese Schritte immer wieder, so erhält man immer genauere Näherungswerte für die gesuchte Nullstelle x^* .

2. Zweipunkt-Sekantenmethode

Die gesuchte Nullstelle x^* der Funktion f wird näherungsweise bestimmt, indem man links der gesuchten Nullstelle einen Punkt $A(a | f(a))$ auf dem Schaubild der Funktion f und rechts davon einen Punkt $B(b | f(b))$ auf dem Schaubild von f wählt und eine Gerade durch diese Punkte legt. Der Schnittpunkt $S(s | 0)$ dieser Geraden mit der x -Achse ist dann der Näherungswert für die gesuchte Nullstelle x^* .

1. Hierzu sucht man ein Intervall $[a; b]$, in dessen Grenzen die gesuchte Nullstelle liegt; sinnvoll: ganze Zahlen für a und b wählen, wobei $b = a + 1$ sein sollte. Es darf nur eine Nullstelle in diesem Startintervall liegen.
2. Näherungswert s für x^* bestimmen: $s_1 = a - \frac{f(a) \cdot (a - b)}{f(a) - f(b)}$
3. $f(s_1)$ ermitteln. Hat $f(s_1)$ das gleiche Vorzeichen wie $f(a)$, so wird für den nächsten Schritt die Intervallgrenze a durch s_1 ersetzt. Hat $f(s_1)$ das gleiche Vorzeichen wie $f(b)$, dann ersetzt man für den nächsten Schritt die Intervallgrenze b durch s_1 .
4. Wiederholt man diese Schritte immer wieder, so erhält man immer genauere Näherungswerte für die gesuchte Nullstelle x^* .

3. Newton-Verfahren

Um mit Hilfe des Newton-Verfahrens die gesuchte Nullstelle x^* einer Funktion f näherungsweise bestimmen zu können, muss die Funktion f differenzierbar sein und $f' \neq 0$ sein. Außerdem darf keine Extremstelle der Funktion zwischen x^* und x_0 liegen. Der Näherungswert für x^* wird bestimmt, indem man den Schnittpunkt der Tangente in einem Punkt nahe x^* an das Schaubild von f mit der x -Achse ermittelt.

Sinnvoller Startwert: Intervall der Länge 1 mit ganzen Zahlen als Intervallenden bestimmen, das die gesuchte Nullstelle enthält ($x_0 \in (a; b)$; a^0 ganze Zahlen; $b = a + 1$). Als Startwert x_0 wird dann die Mitte des Intervalls gewählt.

Berechnung des Näherungswertes für x^* : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Oft ist x_1 ein besserer Näherungswert für x^* als x_0 . Nun wiederholt man diese Rechnung mit dem neuen Startwert x_1 und so fort. So erhält man (unter gewissen Voraussetzungen) eine Folge x_0, x_1, x_2, \dots , die einen immer besseren Näherungswert für x^* darstellen.